ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRỊNH THỊ PHƯƠNG THANH

LIÊN PHÂN SỐ VÀ ĐA THỨC TRỰC GIAO

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRỊNH THỊ PHƯƠNG THANH

LIÊN PHÂN SỐ VÀ ĐA THỨC TRỰC GIAO

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Phương pháp Toán sơ cấp**

Mã số: **60 46 01 13**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TSKH. HÀ HUY KHOÁI

Thái Nguyên - 2017

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành với sự hướng dẫn của GS.TSKH. Hà Huy Khoái (Trường Đại học Thăng Long, Hà Nội). Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán–Tin, cùng các giảng viên đã tham gia giảng dạy, đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu.

Tác giả muốn gửi những lời cảm ơn tốt đẹp nhất tới tập thể lớp Cao học Toán khóa 9 (2015-2017) đã động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong suốt quá trình học tập.

Nhân dịp này, tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo Hải Phòng, Ban Giám hiệu và các đồng nghiệp Trường THCS Trần Phú, Quận Lê Chân, Thành phố Hải Phòng đã tạo điều kiện cho tác giả hoàn thành tốt nhiệm vụ học tập và công tác của mình.

Cuối cùng, tác giả muốn dành những lời cảm ơn đặc biệt nhất đến bố mẹ và đại gia đình đã luôn động viên và chia sẻ những khó khăn để tác giả hoàn thành tốt luận văn này.

Mở đầu

Liên phân số (hay phân số liên tục - continued fractions) là một dạng biểu diễn các số thực dương, cả hữu tỷ và vô tỷ, dưới dạng một phân số nhiều tầng. Người ta đã tìm thấy rất nhiều ứng dụng đa dạng của liên phân số, chẳng hạn các ứng dụng trong các bài toán giải phương trình Pell hay xấp xỉ Diophantus.

Trong Toán học, các *đa thức trực giao* (orthogonal polynomials) đóng một vai trò vô cùng quan trọng. Đồng thời, nó cũng là một công cụ rất hữu ích cho các ngành vật lý và kỹ thuật.

Luận văn này có mục đích, thứ nhất là trình bày về liên phân số cùng các ứng dụng đơn giản của chúng trong nhiều biểu diễn liên quan đến arctan và số π, thứ hai, là nghiên cứu các ứng dụng liên phân số trong các đa thức trực giao.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương:

- *Chương 1. Liên phân số.* Trong chương này chúng tôi trình bày các kiến thức cơ sở về liên phân số, bao gồm các định nghĩa, tính chất cơ bản. Phần này cũng có mục tiêu giới thiệu một số đồng nhất thức đẹp về liên phân số của một số hàm và hằng số thường gặp như arctan và π. Sau đó chúng tôi sẽ thảo luận các ứng dụng của liên phân số trong lịch và âm nhạc.

- *Chương 2. Đa thức trực giao.* Trong chương này chúng tôi sẽ trình bày về xấp xỉ Diophantus, liên phân số và đa thức trực giao, bao gồm cầu phương Gauss, phương pháp Sturm, tiếp cận Chebyshev của đa thức trực giao và cuối cùng là các đa thức trực giao quan trọng.

Mặc dù đã rất cố gắng trong nghiên cứu đề tài và thực hiện luận văn, nhưng vì nhiều lý do khác nhau, chắc chắn luận văn này còn những khiếm khuyết nhất định. Tác giả kính mong những góp ý của các Thầy, Cô, các anh chị đồng nghiệp để luận văn này được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 5 năm 2017

Tác giả

Trịnh Thị Phương Thanh

Chương 1

Liên phân số

1.1 Liên phân số

Hiện nay có rất nhiều cách để viết một con số. Chúng ta có thể sử dụng các hệ cơ số khác nhau, phân số, số thập phân, logarithm, lũy thừa hoặc chỉ miêu tả bằng lời,…Mỗi cách sẽ thuận tiện và phục vụ từng mục đích của mỗi người. Để biểu biễn một số, *liên phân số* là một trong những công cụ trong sáng và đẹp nhất.

Đầu tiên, ta sẽ đi chi tiết một chút vào khái niệm của *liên phân số* hay còn gọi là *phân số liên tục* (continued fractions). Ta bắt đầu bằng cách chỉ ra rằng các liên phân số thường xuất hiện một cách tự nhiên trong một phép chia dài và chúng ta thiết lập những định nghĩa cơ bản. Ví dụ, $\frac{4}{\pi}$ và π có thể viết dưới dạng các liên phân số như sau:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^3}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ddots}}}}, \qquad \pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^3}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \ddots}}}}.$$

Liên phân số bên trái được dựa theo Lord Brouncker (đồng thời là liên phân số đầu tiên được ghi chép lại), và liên phân số bên phải thu được bởi Euler. Ta có công thức cho số e như sau:

$$e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{5 + \ddots}}}} = 1 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}}}}}.$$

Các liên phân số sẽ được thảo luận chi tiết về sau, cả ở khía cạnh toán học và khía cạnh ứng dụng trong thực tiễn.

1.1.1 Liên phân số xuất hiện trong phép chia

Một cách thông thường để một liên phân số xuất hiện là từ những "phép chia lặp". Ta xét các ví dụ sau đây:

Ví dụ 1.1.1. Xét phép chia số 157 cho 68. Ta có thể viết là

$$\frac{157}{68} = 2 + \frac{21}{68}.$$

Nghịch đảo phân số $\frac{21}{68}$ ta có

$$\frac{157}{68} = 2 + \frac{1}{\frac{68}{21}}.$$

Xét số $\frac{68}{21}$, ta viết

$$\frac{68}{21} = 3 + \frac{5}{21} = 3 + \frac{1}{\frac{21}{5}},$$

nên ta có thể viết $\frac{157}{68}$ một cách đẹp hơn,

$$\frac{157}{68} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{21}{5}}}.$$

Do $\frac{21}{5} = 4 + \frac{1}{5}$ nên ta có thể viết

$$\frac{157}{68} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}}. \tag{1.1}$$

Vì 5 là một số nguyên nên phép chia được dừng lại ở đây.

Biểu thức bên phải trong (1.1) được gọi là một *liên phân số hữu hạn đơn giản*. Có nhiều cách để kí hiệu biểu thức này, trong luận văn ta sẽ dùng kí hiệu

$$\langle 2;3,4,5\rangle \quad \text{để biểu diễn cho} \quad 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}}.$$

Như vậy, các liên phân số xuất hiện một cách tự nhiên từ việc viết các số hữu tỷ bằng cách lặp đi lặp lại các phép chia. Tất nhiên, 157 và 68 không phải là hai số đặc biệt, bằng cách lặp lại các phép chia như vậy, ta có thể biểu diễn số hữu tỷ a/b như một liên phân số hữu hạn đơn giản.

Đây chính là *Thuận toán Euclide*. Mỗi cặp $x_0 > x_1$ của các số nguyên